题解报告

Author: Kewth

这次练习赛的四道题目均为完全原创，因此对难度没有把握。也请不要外传本试题，谢谢。

集合均值

做法 1

$n = 1$ 时 B 里面就是 m 相同的数，那么每次从 B 移动到 A 的数都是一样的，随便移动一个就好，$O(m)$ 模拟，预计 40 分。

做法 2

不难想到，B 内的每个值对最终答案的贡献系数都是一样的，并且该贡献系数只与 B 的大小有关。换言之，答案可以表示为：

$$f(|B|) \sum_{x \in B} x$$

通过做法 1 求出 $f(|B|)$ 即可，复杂度瓶颈在于求 2 到 $n \times m + 1$ 的逆元。

- 每次暴力求，预计 70 分。
- 线性求逆元，预计 100 分。
- 事实上只需要关注这些逆元的和，使用更牛逼的多项式科技，好像可以做到 $O(\sqrt{nm} \log nm)$ 的复杂度，但在这题是没有必要的，有兴趣可以自行了解。

总结

个人认为是一道有意思的签到题，顺便考察了线性求逆元。

聚烷撑乙二醇

做法 1

$L_i = R_i$ 的话，每个生成器生成的数都是确定的，直接选最大值就好了，预计 30 分。

做法 2

所有生成器都相同的话，可以从 $L = 0, R = 1$ 开始总结总结规律，预计 40 分。

做法 3

考虑清楚“最优操作”到底是什么样的，这题就很 simple 。

假设只有两个发生器，那么如果放弃第一个选用第二个，第二个发生器产生的数的期望是 $Y = \dfrac{L_2 + R_2}{2}$ 。不难想到如果第一个发生器产生了 X ，$X < Y$ 时放弃 X 更优，否则拿走 X 更优。

更一般的，假设当前在使用第 i 个发生器，其产生了 X ，设从第 $i + 1$ 个发生器开始游戏得到的最优答案是 f_{i+1} ，那么比较 X 和 f_{i+1} 的大小关系就可以确定是否拿走 X 。那么 f_i 的计算就是一个分段的一次函数的积分，来个加权平均数什么的算一下就好了。

复杂度 $O(n)$ ，预计 100 分。

总结

这题 idea 源自一个古希腊哲学，具体是啥也不记得了。

考察了逆向思维，递推和简单的数学知识。

技术情报局

做法 1

枚举区间，暴力计算区间最大值和区间乘积，复杂度 $O(n^3)$ ，预计 20 分。

做法 2

枚举区间，递推计算区间最大值和区间乘积，复杂度 $O(n^2)$ ，预计 40 分。

做法 3

考虑 $l = r$ ，也就是数列恒有 $a_i = X$ ，枚举区间长度即可，复杂度 $O(n)$ ，预计 20 分。

做法 4

这个最大值太突兀了，不难想到枚举每个数，考虑其作为最大值的区间的贡献。

建大根笛卡尔树，设 i 在笛卡尔树上管辖的区间为 $[l, r]$ ，那么当区间 $[L, R]$ 满足 $L \in [l, i] \land R \in [i, r]$ 时 i 恰好作为 $[L, R]$ 的最大值。在笛卡尔树上做些信息合并即可统计答案，预计 60 - 100 分，使用线性的笛卡尔树构造就没有问题。

开 2G 空间是因为本题递归使用的栈空间会非常大。

总结

考察了笛卡尔树的应用，比较简单。

肯德基

做法 1

线性筛或者埃氏筛直接预处理 $f(x)$ 的前缀和，预计 30 分。

做法 2

杜教筛，预计 50 - 60 分。

做法 3

min25 筛，预计 60 - 70 分。

做法 4

powerful number，预计 80 分。

或者容斥也可以做到 $O(T\sqrt{n})$ 的复杂度。

做法 5

沿用做法 4，做法 4 中构造的 powerful number 函数 g 满足：

- $g(1)=1$
- $g(p)=0$
- $g(p^2)=-p^2$
- $g(p^m)=0(m>2)$

有 $f=g\times id$，其中 $id(x)=x$，乘法是狄利克雷卷积。

注意到这个 g 函数的取值比 powerful number 更优秀，它只在部分平方数上有取值，因此枚举平方数可以得到答案就是：

$$\sum_{i=1}^{\sqrt{n}}\mu(i)i^2S(\lfloor\frac{n}{i^2}\rfloor)$$

其中 $S(x)=\sum_{i=1}^{x}i$。

注意到 S 里头是个整除，不难想到整除分块，传统的整除分块的依据是 $\lfloor\frac{n}{i}\rfloor$ 的取值只有 $O(\sqrt{n})$ 种，类似地在这题不难推广得到 $\lfloor\frac{n}{i}\rfloor$ 的取值只有 $O(\sqrt[3]{n})$ 种。

那么线性筛 $\mu(x)x^2$ 的前缀和，于是我们得到了一个 $O(\sqrt{n}+T\sqrt[3]{n})$ 的优美做法，预计 100 分。

总结

部分分考察了各类筛法，正解额外考察了不太寻常的整除分块，是出题人较为满意的一道原创题。

当然本题容斥技巧过硬的话筛法不会也没关系。